Пробный билет №1 вступительных испытаний по программе «Науки о данных»

Тест состоит из 24 вопросов: 14 вопросов по математике и 10 вопросов по программированию.

Чтобы преодолеть минимальный порог, вам нужно набрать 6 баллов по математике и 4 балла по программированию.
На прохождение теста отводится 3 часа.

Математика

1. Сколько имеется четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?

2. Сколько различных трехзначных чисел можно записать, используя цифры 2, 3, 5, 8, 9 по одному разу?

3. В студенческой группе 10 девушек и 15 юношей. На конференцию выбирают 5 делегатов. Найдите вероятность того, что все делегаты окажутся юношами. Ответ округлите до сотых.

4. В круге наудачу выбирается точка. Какова вероятность того, что она окажется в квадрате, вписанном в круг? Ответ округлите до тысячных.
5. Если шахматист A играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста B с вероятностью 0,57. Если A играет черными, то он выигрывает у B с вероятностью 0,45. Шахматисты A и B играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что A выиграет оба раза.

6. Имеются три одинаковых по виду ящика: в первом — 20 белых шаров, во втором — 10 белых и 10 черных, в третьем — 20 черных. Из выбранного наугад ящика вынули

белый шар. Какова вероятность того, что шар был вынут из первого ящика? Ответ округлите до тысячных.

7. Случайно встреченное лицо с вероятностью 0,3 может оказаться блондином. Найдите вероятность того, что среди пяти случайно встреченных лиц будет не менее четырех блондинов. Ответ округлите до сотых.

8. Часы изготавливаются на трех заводах и поступают в магазин. Первый завод производит 40% продукции, второй — 45%, третий — 15%. В продукции первого завода спешат 30% часов, у второго — 70%, у третьего — 90%.

Федор купил часы и обнаружил, что они спешат. Какова вероятность, что часы были изготовлены на втором заводе? Ответ округлите до тысячных.

9. Плотность распределения случайной величины задана функцией:

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1) \text{ при } x \in [1;3], \\ 0 \text{ при остальных значениях } x. \end{cases}$$

Найдите значение параметра *a*.

10. Найти обратную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

11.
Найти компоненты $(x^1, x^2)^{\mathrm{T}}$ вектора v в базисе $e_1 = (2,3)^{\mathrm{T}}$, $e_2 = (3,4)^{\mathrm{T}}$, если известны его компоненты $(y^1, y^2)^{\mathrm{T}}$ в базисе $f_1 = (1,-1)^{\mathrm{T}}$, $f_2 = (2,-3)^{\mathrm{T}}$.

12. Дайте определения:
- линейной зависимости конечного числа векторов в векторном пространстве;
- определение базиса конечномерного векторного пространства;
- Компонент вектора в данном базисе.

13. Дайте определение ранга матрицы. Изложите содержание метода Гаусса приведения матрицы к верхнетреугольному виду. Сформулируйте теорему о ранге.

14. Дайте определения линейного отображения между векторными пространствами, композиции линейных отображений, ядра и образа. Опишите, что такое сумма размерностей ядра и образа.

Программирование

15. Как осуществить перенос строки в Python 3?

    a) //
    b) #
    c) /* */
    d) /n

16. Какой тип данных используется для представления целых чисел в Python 3?

    a) str
    b) float
    c) int
    d) integ

17. Какой оператор используется для проверки равенства двух значений в Python 3?

    a) ==
    b) =
    c) =?
    d)++

18. Какой оператор используется для объединения двух списков в Python 3?

    a) **
    b) *
    c) /
    d) +

19. Какие ключевые слова используются для создания условного оператора в Python 3?

    a) for и while
    b) if и else

c) and и or

d) break и continue

20. Какой метод в Python 3 используется для добавления элемента в конец списка?

a) append()

b) insert()

c) extend()

d) add()

21. Как получить первый элемент списка в Python 3?

a) list(0)

b) list[0]

c) list.last()

d) list.clear()

22. Дополните код, чтобы он выводил на экран числа от 0 до 4(вкл):

```
for i in range(___):
    print(i)
```

23. Дополните код, чтобы он создавал список из чисел от 0 до 4(вкл):

```
lst = [___]
  print(lst)
```

Пример вывода(output):

[0,1,2,3,4]

24. Напишите код функции, которая принимает список чисел и возвращает список только четных чисел.

Ключи к билету №1:

1. 126.

2. 60.

3. 0,057

4. 0,637

5.0,2565

6.0,667

7. 0,03.

8. 0,553

9. 0,5

10.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

11.

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -17 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

12.

Ответ:

Пусть V – векторное пространство. Система из k векторов $\{v_1, \dots v_k\}$ называется линейно зависимой, если существует их нетривиальная линейная комбинация, обращающаяся в ноль. То есть, если существует набор чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, из которых есть хотя бы одно ненулевое, обладающий таким свойством:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0.$$

Если такого набора коэффициентов не существует, то система $\{v_1, \dots v_k\}$ называется линейно независимой.

Базис векторного пространства V – это упорядоченная линейно независимая система векторов $\{e_1, \dots, e_n\}$, такая, что каждый вектор $v \in V$ выражает в виде линейной комбинации $e_1, \dots, e_n$ единственным образом.

Другими словами, если $v \in V$ – некоторый фиксированный вектор и $\{e_1, \dots, e_n\}$ – базис в V, то по этим данным однозначно определяется набор чисел $\{v^1, \dots v^n\}$ такой, что

$$v = \sum_{k=1}^{n} v^k e_k.$$

Набор чисел $\{v^1, \dots v^n\}$ принято называть компонентами вектора v в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$.

13 вопрос.

Ответ:

Фиксируем некоторую матрицу M. Рангом системы строк матрицы M называется максимальное число линейно независимых строк. Аналогично, рангом системы столбцов матрицы M называется максимальное число линейно независимых столбцов.

Альтернативное определение можно дать на языке миноров. Напомним, минор – это определитель квадратной подматрицы матрицы M, получающейся удалением некоторого количества ее строк и (или) столбцов. Ранг матрицы можно определить как порядок наибольшего невырожденного минора матрицы.

Теорема о ранге утверждает, что все эти три определения ранга в действительности определяют одно и то же число: столбцовый, строчной и минорный ранги матрицы всегда совпадают.

Алгоритм Гаусса (точнее, его прямой ход) приведения матрицы к верхнетреугольному виду состоит в следующем. Среди элементов первого столбца матрицы выбирают ненулевой, перемещают содержащую его строку в крайнее верхнее положение, делая эту строку первой. Далее ненулевые элементы первого столбца всех нижележащих строк обнуляются путём вычитания из каждой строки первой строки, домноженной на отношение первого элемента этих строк к первому элементу первой строки. После того, как указанные преобразования были совершены, первую строку и первый столбец мысленно вычёркивают и продолжают, пока не останется матрица нулевого размера. Если на какой-то из итераций среди элементов первого столбца не нашёлся ненулевой, то переходят к следующему столбцу и проделывают аналогичную операцию.

14 Вопрос. Определение линейного отображения между векторными пространствами, композиции линейных отображений, ядра и образа. Сумма размерностей ядра и образа.

Ответ:

Определение линейного отображения между векторными пространствами, композиции линейных отображений, ядра и образа. Сумма размерностей ядра и образа.

Пусть V и W – два векторных пространства над одним полем. Отображение $A : V \to W$ называется линейным, если оно переводит линейные комбинации в линейные комбинации, то есть, если справедливо

$$A(\lambda v + \mu u) = \lambda A(v) + \mu A(u), \qquad \forall v, u \in V.$$

Если заданы отображения $A : V \to W$ и $B : W \to U$, то можно определить сквозное отображение

$$B \circ A : V \to U$$

по формуле

$$(B \circ A)(v) = B(A(v)), \qquad \forall v \in V.$$

Если при этом отображения A и B были линейными, то их композиция тоже автоматически будет линейной.

Пусть $A : V \to W$ – линейное отображение. Образ $\operatorname{im} A$ есть множество тех векторов $w \in W$, у которых есть хотя бы один прообраз. Ядро $\ker A$ есть прообраз нуля $0 \in W$, то есть, множество тех векторов $v \in V$, переходящих при отображении A в ноль. Ядро и образ линейного отображения являются подпространствами в соответствующих линейных подпространствах. Ядро – в V, образ – в W.

Можно показать, что для всякого линейного отображения конечномерных векторных пространств $A : W \to W$ сумма размерностей ядра и образа равна размерности V:

$$\dim \operatorname{im} A + \dim \ker A = \dim V.$$

15. d

16. c

17. a
18. d
19. b
20. a
21. b
22. 5
23. "0, 1, 2, 3, 4" или "range(5)"
24.

```
def even_numbers(lst):
    even_lst = []
    for num in lst:
        if num % 2 == 0:
            even_lst.append(num)
    return even_lst
```

Пробный билет №2 вступительных испытаний по программе «Науки о данных»

Тест состоит из 24 вопросов: 14 вопросов по математике и 10 вопросов по программированию.

Чтобы преодолеть минимальный порог, вам нужно набрать 6 баллов по математике и 4 балла по программированию.

На прохождение теста отводится 3 часа.